blanches.

a- Calculer la probabilité de l'événement (X = 1).

b- Calculer l'espérance mathématique de X.

PROBLEME (10 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $R=\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

I- Soit φ la fonction numérique définie sur $[0;+\infty[$ par $\varphi(x) = (x-1)e^x+1$.

1/a- Etudier les variations de φ et tracer sa courbe représentative (C).

b- Préciser la position de (C) par rapport à la droite D d'équation y=x

2/a- Montrer que φ est une bijection de $[0;+\infty[$ sur $[0;+\infty[$.

b- Construire la courbe représentative (C') de φ^{-1}. Préciser sa position par rapport à la droite D.

3/ Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \varphi^{-1}(u_n)$

a- Montrer que $\forall n \in IN$ on a $u_n > 1$.

b- Montrer que (u_n) est strictement décroissante sur IN.

c- En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

II- Soit la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par: $f(0)=1$ et $f(x)=\frac{e^x-1}{x}$ si $x>0$

1/ Etudier la continuité de f sur $[0,+\infty[$.

2/ Calculer f'(x) pour $x>0$ et étudier son signe.

3/ On se propose dans cette question d'étudier la dérivabilité de f en 0.

Soit h un nombre réel strictement positif et g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $g(x) = \left(\frac{e^h-1-h}{h^2}\right)x^2 - e^x + x + 1$.

a- En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer qu'il existe un nombre réel θ tel que : $0<\theta<1$ et $\frac{e^h-1-h}{h^2} = \frac{e^{\theta h}-1}{2\theta h}$.

b- En déduire $\lim\limits_{h\to0^+}\left[\frac{e^h-1-h}{h^2}\right]$.

c- Montrer alors que f est dérivable à droite en zéro.

4/ Construire la courbe représentative (Γ) de f.

III- Soit la fonction F définie sur IR par $F(x) = \int_0^{e^x} f(t)dt$.

1/a- Justifier l'existence de F(x) pour tout nombre réel x.

b- Montrer que F est dérivable sur IR et calculer F'(x). Etudier les variations de F.

2/ Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$.

3/a- Montrer que $\forall x>0$ on a : $F(x) \geq \int_1^{e^x} \frac{t-1}{t}dt$.